

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО КОНКУРСНОЙ ГРУППЕ «ВШМ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА» (ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В АСПИРАНТУРУ)

На вступительном испытании будут заданы вопросы по выпускной квалификационной работе и вопросы из раздела, соответствующего специализации и направлению будущей научно-исследовательской деятельности поступающего.

Вопросы по выпускной квалификационной работе (магистратура или специалитет)

1. Основные положения.
2. Новизна.
3. Актуальность.

Математический анализ

1. Пределы последовательности. Критерий Коши. Существование предела у монотонно возрастающей ограниченной сверху последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании сходящейся подпоследовательности у ограниченной последовательности.
2. Числовые ряды. Критерий Коши. Признаки сходимости (признаки сравнения, признак Даламбера, признак Лейбница, признак Дирихле).
3. Предел функции. Непрерывные функции. Свойства непрерывных функций на отрезке (теоремы Вейерштрасса об ограниченности и достижимости верхней и нижней грани. Теорема Коши о промежуточных значениях). Обобщения на многомерный случай. Существование односторонних пределов у монотонных функций. Теорема о непрерывности обратной функции и непрерывной монотонной. Равномерная непрерывность.
4. Дифференцируемые функции одной и нескольких переменных. Производные и дифференциал. Формула Тейлора для функций (одной и нескольких переменных). Ряды Тейлора. Элементарные функции. Теорема о неявных функциях (без доказательства).
5. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора. Достаточные условия монотонности дифференцируемой функции. Выпуклые функции. Достаточные условия выпуклости функции два раза дифференцируемой на интервале. Асимптоты.
6. Экстремумы функций одной и нескольких переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума для дифференцируемых функций.
7. Интеграл Римана. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функции по Риману. Теорема о среднем. Первообразная формула Лейбница-Ньютона. Формула интегрирования по частям. Несобственные интегралы. Признаки сходимости несобственных интегралов. Признак Дирихле.
8. Понятие кратного интеграла по Риману. Сведение кратного интеграла к повторному. Замена переменных в кратных интегралах.
9. Понятие гладкой кривой, гладкой поверхности, их параметрическое задание. Определение длины кривой, площади куска поверхности. Криволинейные интегралы первого и второго рода. Поверхностные интегралы первого и второго рода.
10. Формула Грина на плоскости. Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса. Дифференциальные операции. Градиент, дивергенция, ротор (вихрь). Криволинейные интегралы не зависящие от пути интегрирования. Потенциальные векторные поля. Полный дифференциал, необходимые условия, достаточные условия.
11. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости непрерывных функций. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов.

12. Интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Теоремы о непрерывности и дифференцируемости интегралов, зависящих от параметра.

13. Ряды Фурье по тригонометрической системе. Сходимость рядов Фурье для кусочногладких функций. Порядок убывания коэффициентов Фурье для 1-раз непрерывнодифференцируемой функции. Равномерная сходимость ряда Фурье для непрерывнодифференцируемой функции. Равномерное приближение непрерывных функций на отрезке тригонометрическими полиномами и многочленами.

14. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Понятие гильбертова пространства и абстрактных рядов Фурье по полной ортонормированной системе. Теорема о сходимости и среднем рядов Фурье по тригонометрической системе для функции, интегрируемой с квадратом на отрезке.

15. Преобразования Фурье. Формула обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

Линейная алгебра

1. Понятие линейного пространства. Определение линейной зависимости и независимости векторов. Размерность линейного пространства. Базис, координаты вектора, формулы преобразования координат при переходе от одного базиса к другому.

2. Матрицы и действия над ними. Детерминант квадратной матрицы. Ранг матрицы. Эквивалентность его двух определений в терминах линейной независимости строк (или столбцов) матрицы и в терминах неравенства нулю миноров.

3. Системы линейных алгебраических уравнений. Решение однородной системы. Решение неоднородной системы линейных уравнений. Критерий совместности Кронекера-Капелли.

4. Линейные преобразования в n -мерном пространстве. Матрица линейного преобразования и её смысл. Изменение матрицы линейного преобразования при замене базиса. Область значений линейного преобразования и его матрица. Произведение линейных преобразований.

5. Собственные векторы и собственные числа линейного преобразования. Характеристический многочлен. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Матрица линейного преобразования в базисе из собственных векторов. Жорданов базис линейного преобразования и Жорданова нормальная форма (без доказательства).

6. Скалярное произведение в Евклидовом пространстве. Координатное представление скалярного произведения. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации.

7. Понятие самосопряженного линейного преобразования. Свойства его собственных значений и собственных векторов. Матрица самосопряженного преобразования.

8. Ортогональные преобразования. Матрица ортогонального преобразования. Ортогональные матрицы. Переход от одного ортогонального базиса к другому.

9. Билинейные и квадратичные формы. Их матрицы и формулы перехода от одного базиса к другому. Проведение квадратичной формы к каноническому виду в ортонормированном базисе. Закон инерции для квадратичных форм. Понятие положительно определенной квадратичной формы. Критерий Сильвестра (без доказательства).

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Элементарные методы интегрирования уравнений первого порядка (уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах).

2. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения 1-го порядка и для системы n уравнений 1-го порядка с n неизвестными в нормальной форме (без доказательства). Специфика случая линейных дифференциальных уравнений.
3. Линейные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Решение однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения со специальной правой частью в виде квазиполинома. Уравнение Эйлера.
4. Решение однородной системы первого порядка с постоянными коэффициентами (случай простых корней).
5. Линейные уравнения n -го порядка с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений однородного уравнения и её существование. Определитель Вронского. Формула Лиувилля. Возможность понижения порядка однородного уравнения. Решение однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения. Метод вариаций произвольных постоянных.
6. Системы линейных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений однородной системы и её существование. Формула Лиувилля. Метод вариаций произвольных постоянных отысканий частного решения неоднородной системы. Структура общего решения.
7. Понятие об уравнениях, не разрешенных относительно старшей производной. Особое решение.
8. Автономные системы. Положение равновесия. Фазовая плоскость и фазовые траектории. Классификация положений равновесия на плоскости. Понятие устойчивости положения равновесия по Ляпунову и асимптотической устойчивости. Теория об устойчивости по линейному приближению.
9. Первые интегралы автономной системы. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка. Общий вид решения. Задача Коши. Понятие характеристики.
10. Элементы вариационного исчисления. Простейшая задача вариационного исчисления и её несложные обобщения. Вариационная задача при наличии ограничений, изопериметрическая задача.

Теория функций комплексного переменного

1. Функция одной комплексной переменной. Дифференцируемые функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексной переменной.
2. Равенство нулю интеграла от дифференцируемой функции по замкнутому контуру, стягивающемуся в точку. Интегральная форма Коши.
3. Понятие функции регулярной в точке и в области. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Круг сходимости степенного ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Эквивалентность дифференцируемости и регулярности функции и области. Регулярность равномерно сходящегося ряда и регулярных функций.
4. Разложение в ряд Тейлора функции, дифференцируемой в окрестности точки. Ряд Лорана. Элементарные функции Z^n , e^Z , $\sin Z$, $\cos Z$, $\operatorname{sh} Z$, $\operatorname{ch} Z$ и т.д.
5. Изолированные особые точки однозначного характера. Классификация: устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка. Характеризация особой точки функции в терминах коэффициентов ряда Лорана.
6. Понятие вычета в изолированной особой точке однозначного характера. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов.
7. Разложение мероморфных функций на элементарные дроби. Бесконечные произведения. Примеры разложения некоторых целых функций в бесконечные произведения.

8. Теорема единственности регулярной функции, принимающей заданные значения на последовательности точек, предел которой содержится в области регулярности. Аналитическое продолжение. Понятие полной аналитической функции. Основные

многозначные элементарные функции $\sqrt[n]{z}$, $\ln z$. Понятие о римановой поверхности.

9. Конформные отображения, осуществляемые регулярными функциями. Понятие однолистного отображения. Дробно-линейные отображения и их свойства. Отображения, осуществляемые с помощью некоторых элементарных функций. Общая теорема Римана о существовании конформных отображений (без доказательства). Принцип соответствия границ при конформном отображении.

Уравнения в частных производных и уравнения математической физики

1. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных 2-го порядка. Приведение к каноническому виду в точке. Классификация уравнений. Эллиптические, гиперболические и параболические уравнения.

2. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка на плоскости. Понятие характеристики. Приведение к каноническому виду в области. Задачи Коши. Теорема Коши-Ковалевской (без доказательства).

3. Понятие корректной краевой задачи для уравнения в частных производных. Примеры некоторых задач (задачи Коши для уравнения Лапласа). Постановка классических задач математической физики и их физический смысл (задача Коши и смешанная задача для уравнения колебания струны, для уравнения теплопроводности, задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа).

4. Интегральные уравнения Фредгольма. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Теорема Фредгольма для интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывным ядром (без доказательства). Обобщение на случай полярных ядер. Метод последовательных приближений и ряд Неймана.

5. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Собственные значения и собственные функции, их свойства. Теорема Гильберта-Шмидта о разложении истокообразно представимой функции в ряд по собственным функциям ядра (без доказательства).

6. Задача Штурма-Лиувилля. Функция Грина краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

7. Задача Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера в случае уравнения колебания струны. Существование и единственность решения. Область зависимости решения от начальных данных.

8. Смешанные задачи для гиперболических уравнений. Метод Фурье (метод разделения переменных). Единственность решения.

9. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Теорема существования и единственности. Формула Пуассона. Фундаментальное решение и его смысл.

10. Смешанная задача для уравнения теплопроводности. Метод Фурье (метод разделения переменных). Единственность решения, принцип максимума.

11. Уравнение Лапласа и Пуассона. Гармонические функции и их свойства. Формулы Грина. Теорема о среднем для гармонических функций. Принцип максимума и минимума для гармонических функций.

12. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Фундаментальное решение. Понятие функции Грина для задачи Дирихле. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге методом

Фурье. Существование и единственность решения задачи Дирихле в общем случае (без доказательства).

13. Задача Неймана для уравнения Лапласа и Пуассона. Необходимые и достаточные условия её разрешимости. Степень неопределённости решения.

Литература

Математический анализ

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 1 и т. 2.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа, т. 1 и т. 2.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, т. 2 и т. 3.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. 1 и т. 2.

Линейная алгебра

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
2. Гельфонд И.М. Лекции по линейной алгебре.
3. Курош Л.Г. Курс высшей алгебры.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. 2.

Теория функций комплексного переменного

1. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И., Лекции по теории функций комплексного переменного.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.
3. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного.
4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций т. 1. и т. 2.

Уравнения в частных производных и уравнения математической физики

1. Тихонов В.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.
2. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики т. 2 и т. 4.